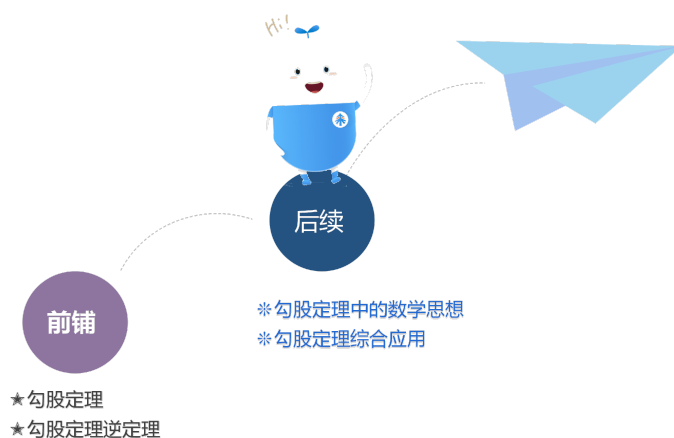
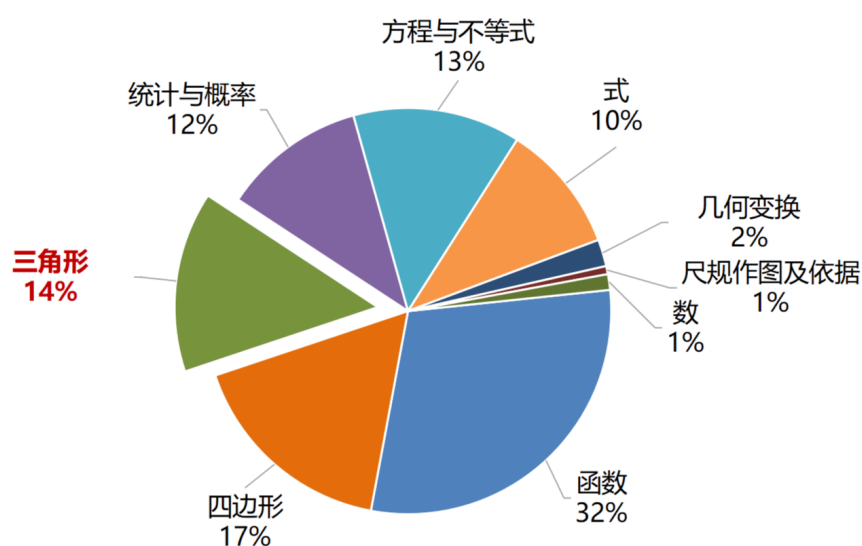


第1讲 勾股定理中的数学思想

勾股定理属于人教版第十七章的内容，这部分的易错点为勾股定理的前提条件——直角三角形，难点为勾股定理的综合应用，是期中、期末考试的高频考点。故这部分我们分为《勾股定理初步》、《勾股定理进阶》两个模块。本模块为《勾股定理进阶》，旨在帮助学生熟练掌握勾股定理的综合运用。

本模块难度中等，适应于勾股定理的短期突破，本模块分为勾股定理中的数学思想、勾股定理综合应用2讲内容，帮助学生熟悉勾股定理综合的常见题型，理清解题思路，学会利用数学思想解决问题。



一、勾股中的分类讨论思想

勾股中的分类讨论思想

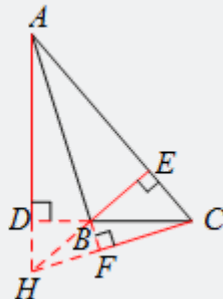
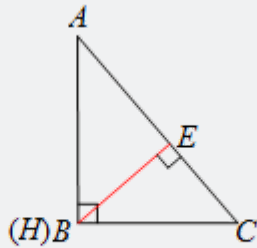
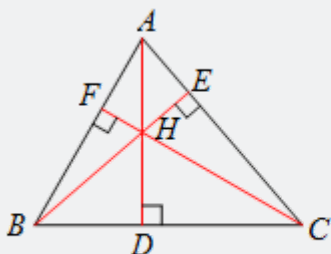
题目中出现高的时候，高可能出现在三角形____部，也可能出现在三角形的____部，因此要讨论三角形的形状：锐角三角形高在____部，钝角三角形高在____部。

对于指明了三角形是直角三角形，但没有指明哪条边是斜边也需要对____的情况进行讨论：斜边为已知边，斜边为未知边。

当题目中寻找何时能构成直角三角形时，要对____进行分类讨论

【教法备注】

1、题目中出现高的时候，高可能出现在三角形内部，也可能出现在三角形的外部，因此要讨论三角形的形状：锐角三角形高在内部；钝角三角形高在外部。



2、有时指明了三角形是直角三角形，但没有指明哪条边是斜边，也需要对斜边的情况进行讨论：斜边为已知边；斜边为未知边。

3、当题目中出现何时能构成直角三角形时，要对直角顶点进行分类讨论。

|| 例题

1. 有一个三角形两边长为4和5，要使三角形为直角三角形，则第三边长为（ ）。

A. 3

B. $\sqrt{41}$

C. 3或 $\sqrt{31}$

D. 3或 $\sqrt{41}$

【答案】D

【解析】当5为斜边时，则第三边长为： $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ；当4和5都是直角边时，则第三边长为： $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ ，综上所述，则这个三角形的第三边长为3或 $\sqrt{41}$ 。
故选D。

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

练习

2. 已知直角三角形的两边长为2和 $\sqrt{5}$ ，则该直角三角形的第三边的长为_____.

【答案】1或3

【解析】以 $\sqrt{5}$ 为斜边， $\therefore$ 第三边为： $\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1$ ，
以2， $\sqrt{5}$ 为直角边， $\therefore$ 斜边为： $\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$ ，
 $\therefore$ 第三边的长为：1或3.

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

例题

3. $\triangle ABC$ 中， $AB = 20$ ， $AC = 13$ ， BC 上的高为12，求 BC 的长.

【答案】 $BC = 21$ 或11.

【解析】如图1所示：

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AB = 20$ ，
 $AD = 12$ ，

根据勾股定理：

$$BD = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AC = 13$ ， $AD = 12$ ，

根据勾股定理： $CD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ ，

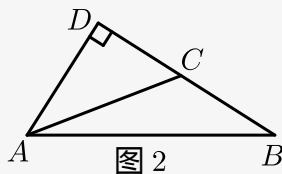
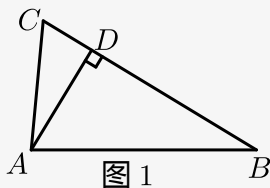
当 D 在线段 BC 上时， $BC = 16 + 5 = 21$ 。

如图2所示：

当 D 在线段 BC 的延长线上

时， $BC = 16 - 5 = 11$ ，

综上所述： $BC = 21$ 或11.



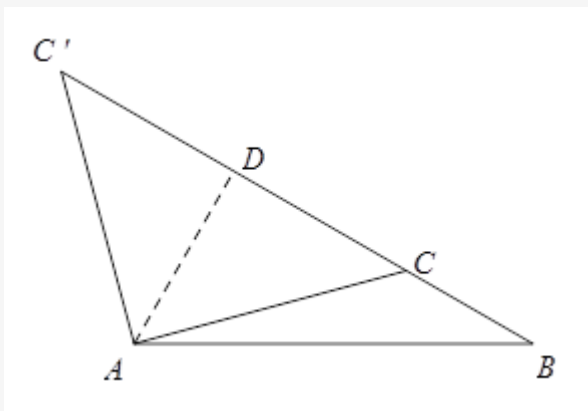
【标注】【知识点】直接用勾股求边长

4. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AC = \sqrt{2}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

【解析】如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 均复合题意．

过点A作 $AD \perp BC$ 于点D．



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\because \angle B = 30^\circ$ ， $AB = 2$ ，

$\therefore AD = 1$ ， $BD = \sqrt{3}$ ．

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 1$ ，

同理 $C'D = 1$ ．

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ， $S_{\triangle ABC'} = \frac{1}{2}BC' \cdot AD = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ．

$\therefore \triangle ABC$ 的面积是 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ．

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

练习

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $AC = 2\sqrt{10}$ ， BC 边上的高 $AD = 6$ ，则另一边 BC 等于_____．

【答案】10或6

【解析】根据题意画出图形，如图所示，

如图1所示， $AB = 10$ ， $AC = 2\sqrt{10}$ ， $AD = 6$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，

根据勾股定理得： $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 8$ ，

$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 2$ ，

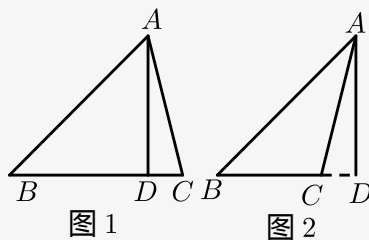
此时 $BC = BD + CD = 8 + 2 = 10$ ；

如图2所示， $AB = 10$ ， $AC = 2\sqrt{10}$ ， $AD = 6$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，

根据勾股定理得： $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 8$ ， $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 2$ ，

此时 $BC = BD - CD = 8 - 2 = 6$



则 BC 等于10或6 .

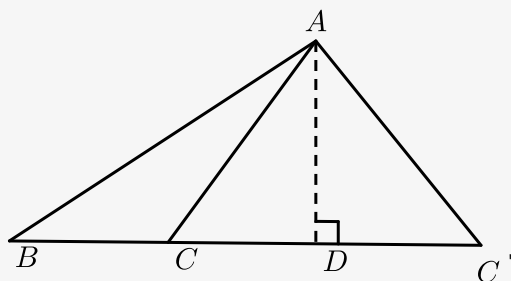
【标注】【知识点】勾股定理与几何问题

6. $\triangle ABC$ 中, $AB = 8$, $AC = 5$, $\angle B = 30^\circ$, 则 $BC =$ _____ .

【答案】 $4\sqrt{3} + 3$ 或 $4\sqrt{3} - 3$

【解析】如图, 过点 A 作 $AD \perp BC$,

当



AB, AC 在 AD 同侧时 ,

$\because \angle B = 30^\circ$, $AB = 8$,

$\therefore AD = 4$, $BD = 4\sqrt{3}$.

$\because AC = 5$,

$\therefore CD = 3$.

$\therefore BC = 4\sqrt{3} - 3$.

当 AB, AC' 在 AD 异侧时 ,

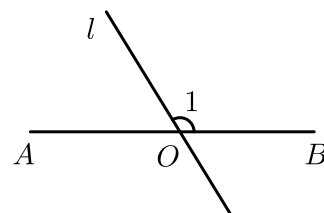
同理可得 , $AD = 4$, $BD = 4\sqrt{3}$, $C'D = 3$.

$\therefore BC' = 4\sqrt{3} + 3$.

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

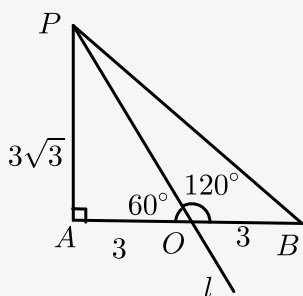
|| 例题

7. 如图, $AB = 6$, O 是 AB 的中点, 直线 l 经过点 O , $\angle 1 = 120^\circ$, P 是直线 l 上一点 . 当 $\triangle APB$ 为直角三角形时, 则 AP 的长为 _____ .

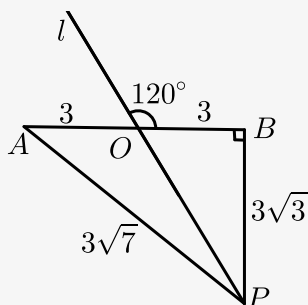


【答案】 $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{7}$ 或3

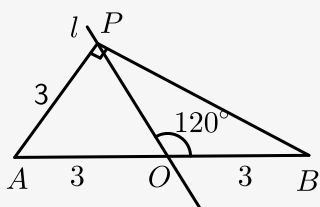
【解析】 如图，当 $\angle A = 90^\circ$ 时， $AP = 3\sqrt{3}$ ，



当 $\angle B = 90^\circ$ 时， $AP = 3\sqrt{7}$ ，



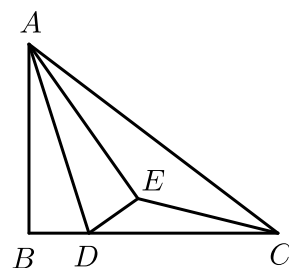
当 $\angle P = 90^\circ$ 时， $AP = 3$ ，



故答案为： $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{7}$ 或3.

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，点D是BC边上一点，连接AD，把 $\angle B$ 沿AD折叠，使点B落在点E处，连接CE，当 $\triangle CDE$ 为直角三角形时，BD的长为_____.



【答案】 3或6

【解析】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10 ,$$

$\therefore \triangle AED$ 是 $\triangle ABD$ 以 AD 为折痕翻折得到的 ,

$$\therefore AE = AB = 6 , DE = BD , \angle AED = \angle B = 90^\circ .$$

当 $\triangle DEC$ 为直角三角形 ,

①如图1 , 当 $\angle DEC = 90^\circ$ 时 ,

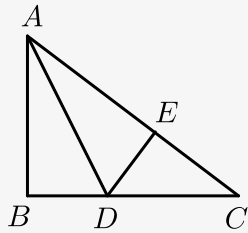


图 1

$$\therefore \angle AED + \angle DEC = 180^\circ ,$$

$\therefore$ 点 E 在线段 AC 上 ,

$$\text{设 } BD = DE = x , \text{ 则 } CD = 8 - x ,$$

$$\therefore CE = AC - AE = 4 ,$$

$$\therefore DE^2 + CE^2 = CD^2 ,$$

$$\text{即 } x^2 + 4^2 = (8 - x)^2 ,$$

$$\text{解得 : } x = 3 , \text{ 即 } BD = 3 .$$

②如图2 , 当 $\angle EDC = 90^\circ$,

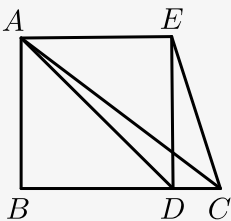


图 2

$$\therefore \angle BDE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle ADE ,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle ADE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = 45^\circ ,$$

$$\therefore AB = BD = 6 .$$

综上所述 : 当 $\triangle DEC$ 为直角三角形时 , BD 的长为 3 或 6 .

故答案为 : 3 或 6 .

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用 ; 直角三角形的存在性

练习

9. 在直角坐标系中点 $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, 点 P 为坐标轴上一点, 若要使 $\triangle ABP$ 为直角三角形, 则点 P 的坐标为 _____ .

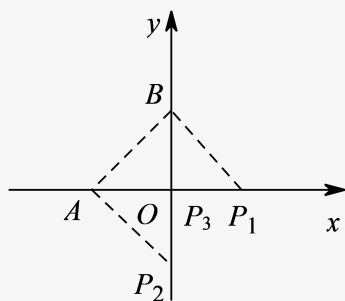
【答案】 $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$

【解析】 $\because P$ 为坐标轴上一点, 且 $\triangle ABP$ 为直角三角形,

$A(-1, 0)$, $B(0, 1)$,

$\therefore$ 直线 AB 与 x 轴和 y 轴的夹角是 45° ,

$\therefore P_1(1, 0)$, $P_2(0, -1)$, $P_3(0, 0)$.



【标注】【知识点】等腰直角三角形的存在性

【教法备注】

2017~2018学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二下学期期中第14题3分

10. 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 6$, 底角为 30° , 动点 P 从点 B 向点 C 运动, 当 $\triangle PAB$ 是直角三角形时, BP 长为 _____ .

【答案】 3或4

【解析】 当 $\angle APB = 90^\circ$ 时, 如图1,

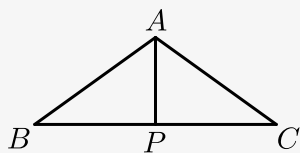


图 1

$\because AB = AC$, $BC = 6$,

$\therefore BP = CP = \frac{1}{2}BC = 3$,

$\because \angle B = 30^\circ$,

$\therefore AB = 2AP$,

由勾股定理得： $(2AP)^2 = AP^2 + 3^2$ ，
 解得： $AP = \sqrt{3}$ ， $AB = 2AP = 2\sqrt{3}$ ，
 当 $\angle BAP = 90^\circ$ ，如图2，

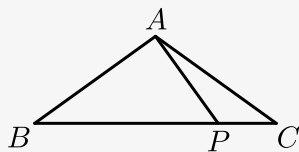


图 2

$\because \angle B = 30^\circ$ ，
 $\therefore BP = 2AP$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中，由勾股定理得： $AB^2 + AP^2 = BP^2$ ，
 $(2\sqrt{3})^2 + AP^2 = (2AP)^2$ ，
 解得： $AP = 2$ ， $BP = 2AP = 4$ ．
 所以 $BP = 3$ 或 4 ．

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

二、勾股中的方程思想

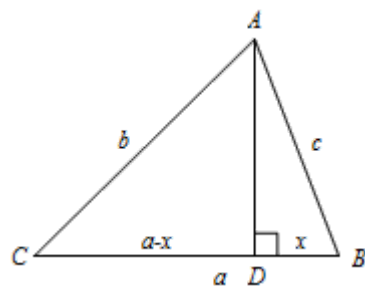
🔗 求任意三角形一条边上的高

已知三角形的三边长分别为 a ， b ， c ，求 BC 边上的高．

$\because \triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 都是_____三角形，

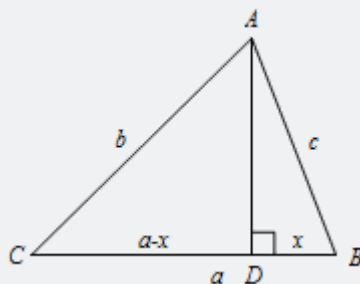
$\therefore AD^2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

解方程即可得到 x 的值．



【教法备注】

求任意三角形一条边上的高：

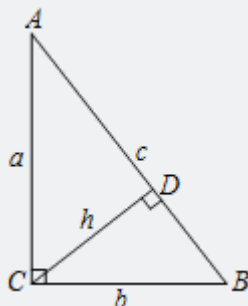


已知三角形的三边长分别为 a, b, c ，求 BC 边上的高。

$\because \triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 都是直角三角形，因此可得到等式 $b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$ ，再根据勾股定理求出高即可。

注意：

求直角三角形斜边上的高利用等面积法



如图所示，根据三角形的面积可得 $ab = ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c}$ 。

💡 实际应用中的方程

解题思路：



【教法备注】

解题思路：

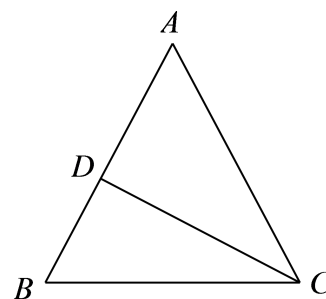


注意：

- (1) 一般求哪条线段就设哪条线段为 x ；
- (2) 把已知和要求的问题转化到一个直角三角形中，利用勾股定理列方程求解；
- (3) 如果已知和要求的问题集中在两个直角三角形中，我们可以利用它们的公共边或弦等的边列方程（如若没有直角三角形需要学生自行构造）

|| 例题

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 10$ ， D 为 AB 上一点， $CD = 8$ ， $BD = 6$ 。



(1) 求证： $\angle CDB = 90^\circ$ ；

(2) 求 AC 的长．

【答案】 (1) 证明见解析．

$$(2) \frac{25}{3} .$$

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中， $BD^2 + CD^2 = 6^2 + 8^2 = 100$ ， $BC^2 = 10^2 = 100$ ．

$$\therefore BD^2 + CD^2 = BC^2 .$$

$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形，则 $\angle CDB = 90^\circ$ ．

(2) 设 $AD = x$ ，则 $AC = AB = 6 + x$ ，

由 (1) 可知 $\angle CDB = 90^\circ$ ．

$$\therefore \angle CDA = 90^\circ .$$

在 $\text{Rt}\triangle CDA$ 中， $AD^2 + CD^2 = AC^2$ ．

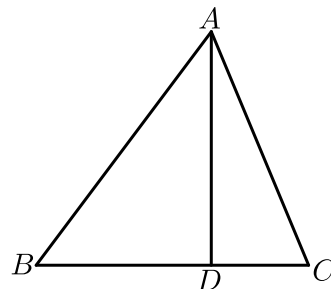
$$\therefore x^2 + 8^2 = (6 + x)^2 .$$

$$\therefore x = \frac{7}{3} .$$

$$\therefore AC = 6 + x = \frac{25}{3} .$$

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 15$ ， $BC = 14$ ， $CA = 13$ ，求 BC 边上的高 AD ．



【答案】 12 .

【解析】设 BD 为 x ，则 $CD = 14 - x$ ，

$\therefore AD$ 为 $\triangle ABC$ 的高，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AB^2 - BD^2 = AD^2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AC^2 - CD^2 = AD^2$ ，

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ ．

即 $15^2 - x^2 = 13^2 - (14 - x)^2$ ，

解得： $x = 9$ ．

$\therefore CD = 14 - x = 14 - 9 = 5$ ．

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$

$= \sqrt{15^2 - 9^2}$

$= 12$ ．

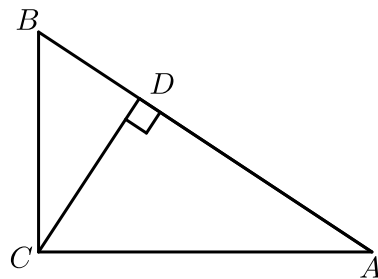
【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【教法备注】

2017~2018学年天津河西区天津市海河中学初二下学期期中模拟第20题

练习

13. 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于点 D ， $\triangle ABC$ 的周长为20，斜边长为8，则 $CD =$ _____．



【答案】5

【解析】设 $BC = x$ ， $AC = y$ ，

$$\therefore \begin{cases} x^2 + y^2 = 64 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$\therefore xy = \frac{1}{2} \cdot [(x + y)^2 - (x^2 + y^2)]$$

$$\therefore xy = 40$$

$$\therefore CD \cdot AB = BC \cdot AC$$

$$\therefore CD = \frac{BC \cdot AC}{AB}$$

$$\therefore CD = 5.$$

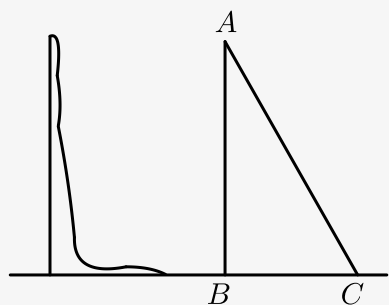
【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

例题

14. 小明想知道学校旗杆的高，他发现旗杆上的绳子垂到地面还多1m，当它把绳子的下端拉开5m后，发现下端刚好接触地面，则旗杆的高为 _____ m.

【答案】12

【解析】根据题意画出图形如图所示：



则 $BC = 5\text{m}$,

设旗杆的高 AB 为 $x\text{m}$, 则绳子 AC 的长为 $(x+1)(\text{m})$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, 即 $x^2 + 5^2 = (x+1)^2$,

解得: $x = 12$, 故 $AB = 12\text{m}$, 即旗杆的高为 12m .

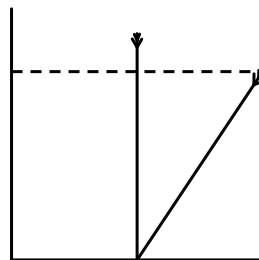
【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【教法备注】

2017~2018学年4月天津南开区南开大学附属中学初二下学期月考第11题

练习

15. 在我国古代数学著作《九章算术》中记载了一道有趣的问题，这个问题的意思是：有一个水池，水面是一个边长为10尺的正方形，在水池的中央有一根新生的芦苇，它高出水面1尺，如果把这根芦苇垂直拉向岸边，它的顶端恰好到达岸边的水面，请问这个水池的深度和这根芦苇的长度各是多少？



【答案】 水深12尺，芦苇长13尺．

【解析】 设水池深度为 x 尺，由题意可得：

$$x^2 + 5^2 = (x + 1)^2,$$

解得 $x = 12$ ，

则 $x + 1 = 13$ ，

答：水深12尺，芦苇长13尺．

【标注】【能力】抽象概括能力

【能力】运算能力

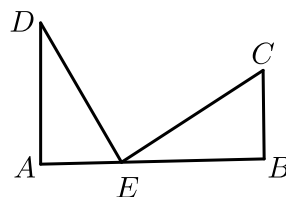
【知识点】正方形的性质

【知识点】勾股定理与实际问题

【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【思想】方程思想

16. 如图，铁路上 A, B 两点相距25km， C, D 为两村庄， $DA \perp AB$ 于点 A ， $CB \perp AB$ 于点 B ，已知 $DA = 16\text{km}$ ， $CB = 11\text{km}$ ，现在要在铁路 AB 上建一个土特产品收购站 E ，使得 C, D 两村到 E 站的距离相等，则 E 站应建在离 A 站多少km处？



【答案】 E 站应建在离 A 站9.8km处．

【解析】 设 $AE = x\text{km}$ ，

$\because C, D$ 两村到 E 站的距离相等，

$\therefore DE = CE$ ，即 $DE^2 = CE^2$ ，

由勾股定理，得 $x^2 + 16^2 = 11^2 + (25 - x)^2$ ，

解得 $x = 9.8$,

$\therefore E$ 站应建在离 A 站 9.8km 处 .

【标注】【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

【知识点】勾股定理与实际问题

【知识点】方程思想在勾股定理的应用

三、勾股中的转化与化归思想

展开图求最短距离

展开图求解最短距离，可以把几何体适当展开成平面图形，再利用_____，或点到直线_____等性质来解决问题 .

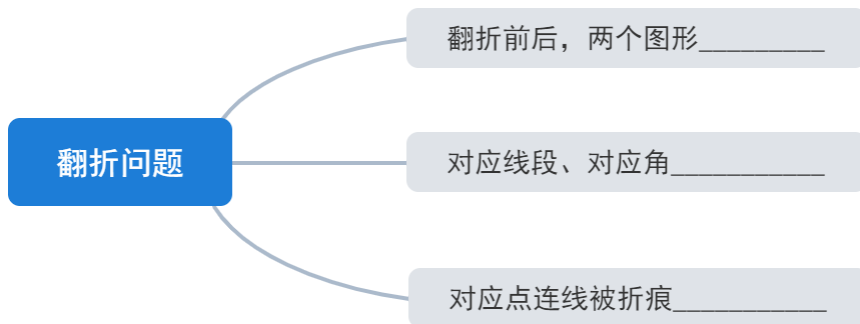
【教法备注】

把几何体适当展开成平面图形，再利用“两点之间线段最短”，或点到直线“垂线段最短”等性质来解决问题

常见类型：

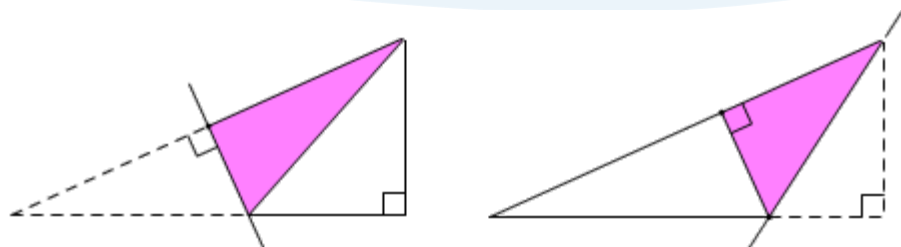
台阶中的最值问题、圆柱（锥）中的最值问题、长（正）方体中的最值问题

翻折问题



常见翻折图形：

①三角形翻折



②矩形翻折

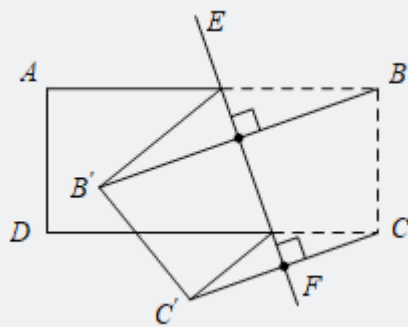
翻折使直角顶点重合	沿对角线翻折	翻折使直角顶点落在边上

【教法备注】

(1) 翻折变换的性质：

- ①翻折前后，两个图形全等；
- ②对应线段、对应角相等；
- ③对应点连线被折痕垂直平分。

例：

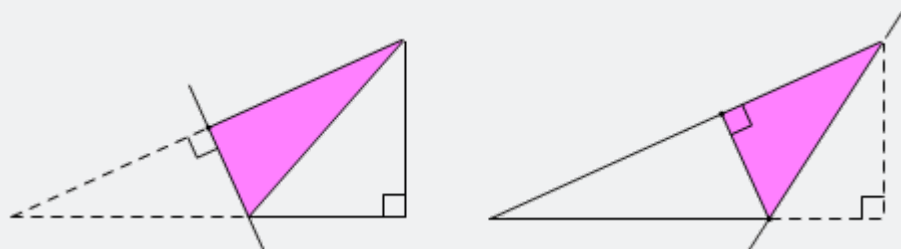


BB' 、 CC' 被 EF 垂直平分

解题步骤：

- (1) 找：找折痕，利用翻折性质，找全等
- (2) 设：设适当的未知数，将已知边和未知边（用含 x 的代数式表示）
转化到同一直角三角形中
- (3) 列：利用勾股定理列方程，解方程
- (2) 常见翻折图形：

①三角形翻折



第一幅图，折痕相当于垂直平分线；第二幅图，折痕相当于角平分线

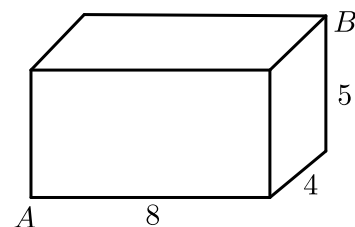
②矩形翻折

翻折使直角顶点重合	沿对角线翻折	翻折使直角顶点落在边上

图①中，易证 $\triangle BAE \cong \triangle BC'F$

|| 例题

17. 如图，长方体的长、宽、高分别为8cm、4cm和5cm，一只蚂蚁欲从顶点A沿长方体表面爬到点B处，则它所爬行的最短距离是（ ）cm.



A. $\sqrt{145}$

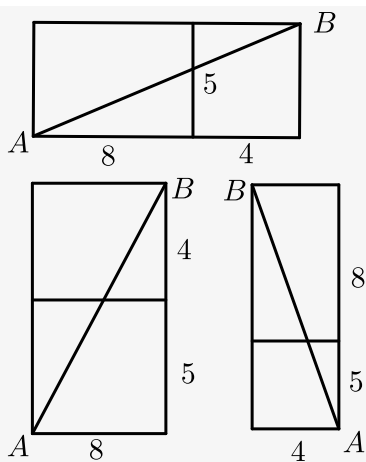
B. 13

C. 12

D. $\sqrt{185}$

【答案】A

【解析】如图所示，



路径一： $AB = \sqrt{(4+8)^2 + 5^2} = 13(\text{cm})$ ；

路径二： $AB = \sqrt{(5+4)^2 + 8^2} = \sqrt{145}(\text{cm})$ ；

路径三： $AB = \sqrt{(5+8)^2 + 4^2} = \sqrt{185}(\text{cm})$ ；

$\therefore \sqrt{185} > 13 > \sqrt{145}$ ，

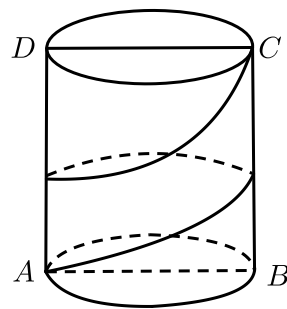
$\therefore \sqrt{145}\text{cm}$ 为最短路径。

【标注】【知识点】勾股定理与展开图最短路径问题

【教法备注】

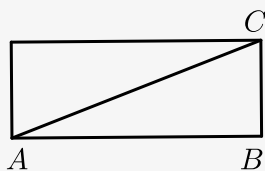
2018~2019学年3月天津河西区天津市培杰中学初二下学期月考第14题3分

18. 在底面直径为2cm，高为3cm的圆柱体侧面上，用一条无弹性的丝带（宽度忽略不计）从A至C按如图所示的圈数缠绕，则丝带的最短长度为 _____ cm。（结果保留 π ）



【答案】 $3\sqrt{\pi^2 + 1}$

【解析】 如图所示，



$\therefore$ 无弹性的丝带从A至C缠绕1.5圈，

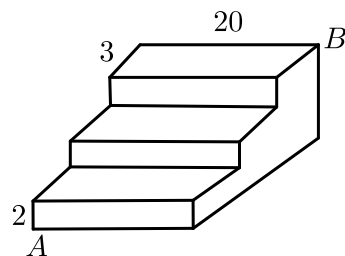
∴展开后， $AB = 3\pi \text{ cm}$ ， $BC = 3\text{ cm}$ ，

∴由勾股定理得： $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9\pi^2 + 9} = 3\sqrt{\pi^2 + 1}(\text{cm})$ 。

【标注】【知识点】勾股定理与展开图最短路径问题

练习

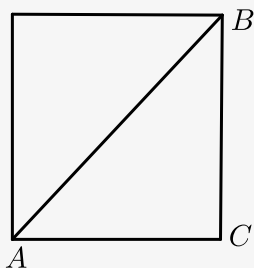
19. 如图，台阶A处的蚂蚁要爬到B处搬运食物，它爬行的最短距离是 _____。



【答案】25

【解析】如图所示：台阶平面展开图为长方形， $AC = 20$ ， $BC = 5 + 5 + 5 = 15$ ，

则蚂蚁沿台阶面爬行到B点最短路程是此长方形的对角线长。



由勾股定理得： $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ，即 $AB^2 = 20^2 + 15^2$ ，

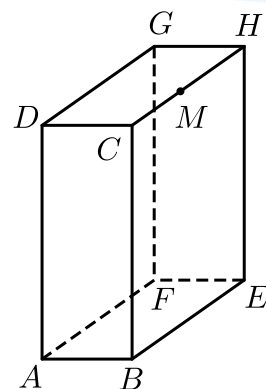
∴ $AB = 25$ ，故答案为：25。

【标注】【知识点】勾股定理与展开图最短路径问题

【教法备注】

2017~2018学年3月天津河西区天津市新华中学初二下学期月考第27题2分

20. 如图，长方体的长 $BE = 15\text{ cm}$ ，宽 $AB = 10\text{ cm}$ ，高 $AD = 20\text{ cm}$ ，点M在CH上，且 $CM = 5\text{ cm}$ ，一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点A爬到点M，需要爬行的最短距离是 _____。



【答案】 25cm

【解析】 分两种情况比较最短距离：

如图1所示，

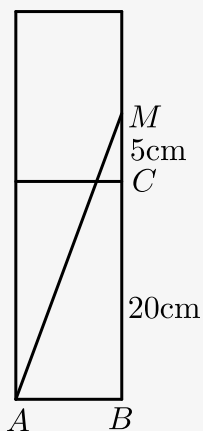


图1

$$AM = \sqrt{10^2 + (20 + 5)^2} = 5\sqrt{29}(\text{cm}) .$$

如图2所示，

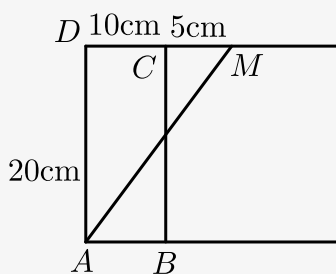


图2

$$AM = \sqrt{20^2 + (10 + 5)^2} = 25(\text{cm}) .$$

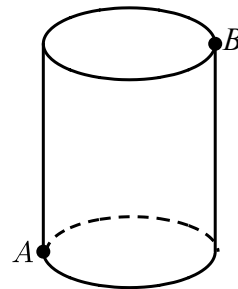
$$\because 5\sqrt{29} > 25 ,$$

$\therefore$ 第二条路线最短，此时最短距离为25cm .

$\therefore$ 需要爬行的最短距离是25cm .

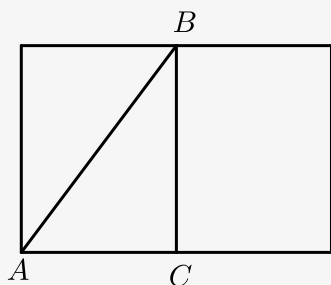
【标注】【知识点】勾股定理与展开图最短路径问题

21. 如图，一个底面直径为 $\frac{30}{\pi}$ cm，高为20cm的糖罐子，一只蚂蚁从A处沿着罐的表面爬行到B处，则蚂蚁爬行的最短距离是_____.



【答案】25cm

【解析】将此圆柱展成平面图得：

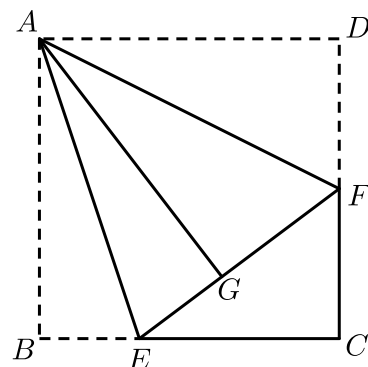


$\because$ 高为20cm，底面直径为 $\frac{30}{\pi}$ cm，
 $\therefore$ 底面周长 $= \frac{30}{\pi} \cdot \pi = 30(\text{cm})$ ，
 $\therefore BC = 20\text{cm}$ ， $AC = \frac{1}{2} \times 30 = 15(\text{cm})$ ，
 在Rt $\triangle ABC$ 中， $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ，
 $\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25(\text{cm})$ 。
 故答案为：25cm。

【标注】【知识点】和圆柱有关的最值问题

|| 例题

22. 如图，正方形纸片ABCD的边长为3，点E、F分别在边BC、CD上，将AB、AD分别沿AE、AF折叠，点B、D恰好都落在点G处，已知BE = 1，则EF的长为()。



A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{9}{4}$

D. 3

【答案】 B

【解析】 $\because$ 正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 3 ,

$$\therefore \angle C = 90^\circ, BC = CD = 3,$$

根据折叠的性质得: $\angle AGE = \angle B = 90^\circ, \angle AGF = \angle D = 90^\circ,$

$$EG = BE = 1, GF = DF,$$

$$\therefore \angle AGE + \angle AGF = 180^\circ.$$

$\therefore$ 点 E, G, F 共线.

$$\text{设 } DF = x,$$

$$\text{则 } EF = EG + GF = 1 + x, FC = DC - DF = 3 - x,$$

$$EC = BC - BE = 3 - 1 = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EFC \text{ 中, } EF^2 = EC^2 + FC^2,$$

$$\text{即 } (x + 1)^2 = 2^2 + (3 - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3}{2},$$

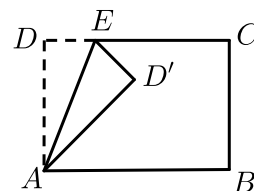
$$\therefore DF = \frac{3}{2}, EF = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

【标注】 【知识点】 翻折问题与勾股定理

23. 如图, 长方形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ, AD = BC = 8,$

$AB = CD = 17$, 点 E 为射线 DC 上的一个动点, $\triangle ADE$ 与 $\triangle AD'E$ 关于直线 AE 对称, 当

$\triangle AD'B$ 为直角三角形时, DE 的长为 ____ .



【答案】2

【解析】设 $DE = x$ ，则 $D'E = DE = x$ ， $CE = 17 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD'$ 中， $BD' = \sqrt{AB^2 - AD'^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中， $BC^2 + EC^2 = BE^2$ ， $8^2 + (17 - x)^2 = (15 + x)^2$ ，

解得 $x = 2$ 。

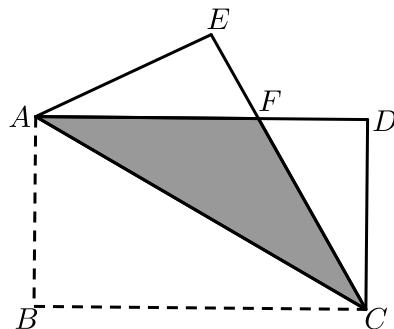
故答案为：2。

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

【教法备注】

2017年天津南开区初三一模第9题3分

24. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 B 落在点 E 处， EC 交 AD 于 F 。



(1) 求证： $\triangle AEF \cong \triangle CDF$ 。

(2) 若 $AB = 4$ ， $BC = 8$ ，求图中阴影部分的面积。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 图中阴影部分的面积 = 10。

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 B 落在点 E 处，

$\therefore \angle E = \angle B$ ， $AB = AE$ ，

$\therefore AE = CD$ ， $\angle E = \angle D$ ，

在 $\triangle AEF$ 与 $\triangle CDF$ 中，
$$\begin{cases} \angle E = \angle D \\ \angle AFE = \angle CFD \\ AE = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CDF$ 。

(2) $\because AB = 4$ ， $BC = 8$ ，

$$\therefore CE = AD = 8, AE = CD = AB = 4,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CDF,$$

$$\therefore AF = CF, EF = DF,$$

$$\therefore DF^2 + CD^2 = CF^2,$$

$$\text{即 } DF^2 + 4^2 = (8 - DF)^2,$$

$$\therefore DF = 3,$$

$$\therefore EF = 3,$$

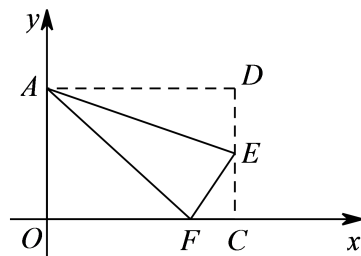
$$\therefore \text{图中阴影部分的面积} = S_{\triangle ACE} - S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 10.$$

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

练习

25. 如图，在平面直角坐标系中，长方形纸片的 AB 边在 y 轴上， BC 边在 x 轴上， B 与坐标原点重合，折叠长方形 $ABCD$ 的一边 AD ，使点 D 落在 BC 边的 F 处，折痕为 AE ，已知 A 点坐标为 $(0, 8)$ ， C 点坐标为 $(10, 0)$ 。

求： E 点坐标。



【答案】 $(10, 3)$ 。

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，点 B 与点 O 重合，

$$\therefore DC = AB = 8, AF = AD = BC = 10.$$

$$\text{设 } EF = DE = x, EC = 8 - x;$$

$$\text{由勾股定理得：} BF^2 = 10^2 - 8^2,$$

$$\therefore BF = 6,$$

$$\therefore CF = 10 - 6 = 4,$$

$$\text{在Rt}\triangle EFC\text{中，由勾股定理得：} x^2 = 4^2 + (8 - x)^2,$$

$$\text{解得：} x = 5,$$

$$EC = 8 - 5 = 3.$$

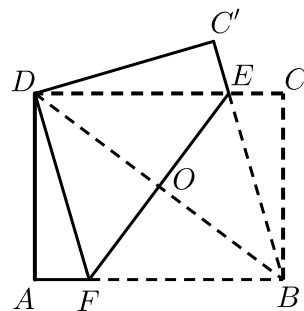
$$\therefore E\text{点的坐标为}(10, 3).$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

【教法备注】

2016~2017学年天津红桥区初二下学期期中第21题

26. 如图所示, 把长方形 $ABCD$ 纸片折叠, 使点 B 落在点 D 处, 点 C 落在 C' 处, 折痕 EF 与 BD 交于点 O , 已知 $AB = 16$, $AD = 12$, 则折痕 EF 的长为 _____ .



【答案】 15

【解析】 由折叠可知, EF 垂直平分 BD , 又 $AB \parallel CD$,

$$\therefore \triangle BOF \cong \triangle DOE,$$

$$\therefore OF = OE,$$

$$\therefore EF = 2OF,$$

$$\text{设 } DF = FB = x, \text{ 则 } AF = 16 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, 由勾股定理得: } BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 20,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADF \text{ 中, 由勾股定理得: } AD^2 + AF^2 = DF^2,$$

$$\text{即 } 12^2 + (16 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{25}{2},$$

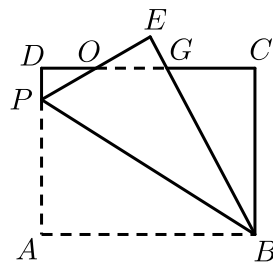
$$\therefore BF = \frac{25}{2}, OB = \frac{1}{2}BD = 10,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BOF \text{ 中, } OF = \sqrt{BF^2 - OB^2} = \frac{15}{2},$$

$$\therefore EF = 2OF = 15.$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

27. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, $BC = 6$, P 为 AD 上一点, 将 $\triangle ABP$ 沿 BP 翻折至 $\triangle EBP$, PE 与 CD 相交于点 O , BE 与 CD 相交于点 G , 且 $OE = OD$, 则 AP 的长为 _____ .



【答案】 4.8

【解析】 如图所示：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle D = \angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $AD = BC = 6$ ， $CD = AB = 8$ ，

根据题意得： $\triangle ABP \cong \triangle EBP$ ，

$\therefore EP = AP$ ， $\angle E = \angle A = 90^\circ$ ， $BE = AB = 8$ ，

在 $\triangle ODP$ 和 $\triangle OEG$ 中，

$$\begin{cases} \angle D = \angle E \\ OD = OE \\ \angle DOP = \angle EOG \end{cases},$$

$\therefore \triangle ODP \cong \triangle OEG$ (ASA)，

$\therefore OP = OG$ ， $PD = GE$ ，

$\therefore DG = EP$ ，

设 $AP = EP = x$ ，则 $PD = GE = 6 - x$ ， $DG = x$ ，

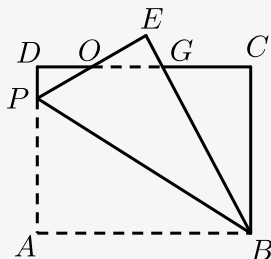
$\therefore CG = 8 - x$ ， $BG = 8 - (6 - x) = 2 + x$ ，

根据勾股定理得： $BC^2 + CG^2 = BG^2$ ，

即 $6^2 + (8 - x)^2 = (x + 2)^2$ ，

解得： $x = 4.8$ ，

$\therefore AP = 4.8$ 。

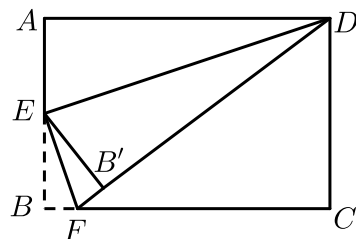


【标注】 【知识点】 四边形与折叠问题

【教法备注】

2018~2019 学年 3 月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第 18 题 3 分

28. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 6$ ， E 是 AB 边的中点， F 是线段 BC 上的动点，将 $\triangle EBF$ 沿 EF 所在直线折叠得到 $\triangle EB'F$ ，连接 $B'D$ ，则 $B'D$ 的最小值是（ ）。



- A. $2\sqrt{10} - 2$ B. 6 C. $2\sqrt{13} - 2$ D. 4

【答案】 A

【解析】 如图，当点 B' 在 DE 上时，此时 $B'D$ 的值最小，

根据折叠的性质， $\triangle EBF \cong \triangle EB'F$ ，

$$\therefore EB' = EB,$$

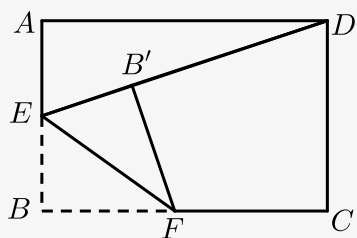
$\because E$ 是 AB 边的中点， $AB = 4$ ，

$$\therefore AE = EB' = 2,$$

$\because AD = 6$ ，

$$\therefore DE = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore DB' = 2\sqrt{10} - 2.$$



【标注】 【知识点】 翻折问题与勾股定理

此题的最值可用三角形三边关系推导